

稀疏自适应系统识别算法逆QR分解优化研究

彭 弋^{①②③} 张鹏飞^{*①②③} 王晓永^④ 高俊奇^{①②③}
李长隆^{①②③} 张志远^{①②③} 孙天翔^{①②③}

^①(哈尔滨工程大学 水声技术全国重点实验室 哈尔滨 150001)

^②(海洋信息获取与安全工信部重点实验室(哈尔滨工程大学) 工业和信息化部 哈尔滨 150001)

^③(哈尔滨工程大学 水声工程学院 哈尔滨 150001)

^④(青岛市黄岛区政协机关服务保障中心 青岛 266555)

摘 要: 传统稀疏正则化递归最小二乘算法 L1/L0 Norm Recursive Least Squares (L1/L0-RLS)在稀疏参数空间估计中展现出理论的优越性,已成为系统辨识和信道均衡领域的重要方法。但在有限数值精度条件下其协方差矩阵迭代计算过程易导致舍入误差逐次累积,诱发最小二乘解发散失稳现象。为解决该问题,本文提出基于逆QR分解(Inverse QR Decomposition, IQRD)框架的改进算法。该框架不仅有效抑制了传统正则化RLS算法中舍入误差的积累,而且省去了传统QR分解中权重系数回代的计算环节,从而显著提升了算法在有限精度环境下的数值鲁棒性与系统辨识效率。具体而言,本文首先系统构建了L1/L0约束逆QR分解架构下的L1-IQRD-RLS与L0-IQRD-RLS算法,通过理论推导得到了具有普适性的权重系数递推表达式,创新地将自动参数选择机制引入算法框架,解决了稀疏正则化参数的动态优化难题。为验证所提算法在稀疏约束与鲁棒性方面的效果,采用蒙特卡洛仿真实验对算法性能进行定量评估,结果表明L1-IQRD-RLS与L0-IQRD-RLS在系统稀疏表征、参数估计方差以及协方差矩阵条件数等关键指标上均展现出显著的性能优势。实测数据验证进一步证实,改进算法在精度受限环境下仍能保持数值稳定性,较传统方法鲁棒性显著提升。

关键词: 递归最小二乘; 稀疏优化; 逆QR分解; 系统识别

中图分类号: TN972

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2026)00-0001-11

DOI: 10.11999/JEIT250562

CSTR: 32379.14.JEIT250562

1 引言

系统辨识技术作为现代控制理论的核心方法,旨在通过构建输入输出数据的参数化数学模型,实现动态特性的定量表征与预测。在主动探测系统的信号处理链中,该技术构成信号处理的关键环节,其工程实现层面主要体现为三个核心功能模块:基于多维状态空间建模的收发通道解耦、基于干扰统计特性估计的自适应滤波抑制、以及依托信道冲激响应辨识的码间干扰消除^[1]。

为应对系统动态变化与非平稳环境,具备实时更新能力的自适应滤波算法成为系统辨识技术动态参数估计的主流方法之一^[2]。经典自适应滤波算法体系中,递归最小二乘(Recursive Least Squares, RLS)算法相较于最小均方误差(Least Mean Square, LMS)算法显著提升了收敛速度与在非平稳信号适应

能力,具备更广泛的应用。但RLS算法直接对输入自相关矩阵求逆的操作易导致有限精度环境下的数值失稳现象,严重制约RLS算法在系统识别中的应用^[3-5]。S.T.Alexander等人^[6,7]开发的IQRD-RLS(inverse QR decomposition-RLS)采用矩阵正交分解技术,有效降低了矩阵求逆运算复杂度并增强数值稳定性,无需通过复杂回代运算间接求解滤波器系数显著简化了运算流程。

在实际应用中,除了稳定性,算法的效率与准确性同样至关重要。诸多实际系统如水声通信信道具有稀疏特性,即系统传递函数在某些少数位置上的权值占据大部分能量,而其余位置的抽头系数趋近于零,当前主流RLS算法未能有效利用系统稀疏先验信息,导致辨识精度受限、运算效率偏低^[8-11,30]; 2024年,Shankar D等人^[12]通过稀疏估计建模的磁场通信信道,减少信息传输中产生的误差,构建了一种可靠的水下无线通信技术。波束成形作为自适应滤波算法的另一应用领域,近年许多研究人员针对算法的鲁棒性、先验信息约束等方面进行了优化,广泛应用于卫星通信、雷达遥感等阵列信号处理领域^[13-15]。结合压缩感知理论的稀疏自适应滤波技术,通过引入凸正则化约束增强算法稀

收稿日期: 2025-06-18; 改回日期: 2026-03-12; 网络出版: 2026-04-25

*通信作者: 张鹏飞 zhangpf9009@hrbeu.edu.cn

基金项目: 电波环境特性及模化技术重点实验室基金项目(JCKY2024210C61424030202)

Foundation Item: Fundation: Key Laboratory Fund Project on Radio Wave Environment Characteristics and Modeling Technology (JCKY2024210C61424030202)

疏表达能力,即是在自适应滤波器的权重更新过程引入权重的范数,在每一次迭代中对滤波器抽头权重的代价函数施加稀疏性约束^[16,17]。Eksioğlu等人^[18]通过次微分的方式求解出了L1-RLS (L1-norm RLS)算法和重加权L1-RRLS (L1-Reweighted RLS)算法,并构建范数类凸正则化CR-RLS(Convex Regularized-RLS)算法权重更新的统一表达式,并证实其在稀疏场景下具有更优的收敛速度与稳态误差特性^[19]。然而,这类改进算法仍遵循标准RLS算法的协方差矩阵更新范式,在稀疏约束项嵌入过程中会引发结构性的数值病态问题。如何通过矩阵分解方法的创新设计,在保证收敛速率与稳态精度的前提下,建立具有严格Lyapunov稳定性的稀疏自适应滤波架构,仍是当前自适应信号处理领域亟待突破的理论瓶颈^[20-23]。针对传统范数凸正则化RLS算法在有限数值精度条件下存在的协方差矩阵迭代发散问题,提出基于逆QR分解框架的改进型稀疏化RLS算法。研究首先系统构建了L1/L0范数约束的逆QR分解实现L1-IQRD-RLS与L0-IQRD-RLS算法,通过规避传统QR分解中回代计算环节,有效抑制舍入误差的累积效应。理论推导建立了具有普适性的权重矩阵递推表达式,创新性地 将CR-RLS自动参数选择机制引入算法框架,解决了稀疏正则化参数的动态优化难题^[24-29]。

本文采用如下结构,第一部分对文章研究背景及意义进行阐述。第二部分进行算法的详细推导,具体包括目标函数构建、次微分方法求解稀疏约束下目标函数。第三部分为算法的仿真验证,对比不同算法的性能。第四部分为实测数据的验证,对所提方法进行测试。最后,基于数值仿真与实测数据测试效果进行总结,并进行讨论分析。

2 理论推导

2.1 基础理论模型

M阶系统辨识问题的数学模型如下

$$d(n) = \mathbf{w}(n) \mathbf{x}(n) + \text{noise}(n) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{w}(n) = [w^1, w^2, w^3, \dots, w^M]$ 为传输系统权重向量, $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)]^T$ 为输入信号的M阶前开窗向量, 其中 $x(n)$ 为输入, $d(n)$ 为实际输出, $\text{noise}(n)$ 为观测噪声。自适应系统辨识算法的目的是根据输入和输出信号, 使设计的滤波器系数 $\hat{\mathbf{w}}_k(n)$, 逼近真实传输系统的权重向量 $\mathbf{w}(n)$, 滤波器输出 $\hat{d}(n)$ 逼近参考的实际输出信号 $d(n)$

$$\hat{d}(n) = \hat{\mathbf{w}}_k(n) \mathbf{x}(n) \quad (2)$$

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n) \quad (3)$$

$e(n)$ 为每次迭代的误差, 求解最小二乘滤波器 $\mathbf{w}(n)$ 的标准RLS问题, 即最小化由定义的累积平方误差代价函数 $\epsilon(n)$, 定义为

$$\epsilon(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} e^2(i) \quad (4)$$

其中 λ 为遗忘因子。一种易于实现的强制稀疏化方法是利用参数向量估计的加权L1范数RLS问题, 代价函数可以表示为

$$J(n) = \frac{1}{2} \epsilon(n) + \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\mathbf{w}}(n)| \quad (5)$$

定义输入信号的前开窗矩阵为 $\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(n)]^T$, 其中假设输入信号来临之前的点均为零即 $\{x(n) = 0, n \leq 0\}$, 参考信号向量 $\mathbf{d}(n) = [d(1), d(2), \dots, d(n)]^T$, $\mathbf{\Lambda}(n) = \text{diag} [\sqrt{\lambda^{n-1}}, \sqrt{\lambda^{n-2}}, \dots, \sqrt{\lambda}, 1]$, 于是可以将 $J(n)$ 表示为

$$J(n) = 1/2 \|\mathbf{\Lambda}(n) \mathbf{d}(n) - \mathbf{\Lambda}(n) \mathbf{X}(n) \hat{\mathbf{w}}(n)\|^2 + \|\hat{\mathbf{w}}(n)\|_1 \quad (6)$$

将 $J(n)$ 前项中右乘一个不改变范数值的酉矩阵 $\mathbf{Q}(n)$

$$J(n) = 1/2 \|\mathbf{Q}(n) \mathbf{\Lambda}(n) \mathbf{d}(n) - \mathbf{Q}(n) \mathbf{\Lambda}(n) \cdot \mathbf{X}(n) \hat{\mathbf{w}}(n)\|^2 + \|\hat{\mathbf{w}}(n)\|_1 \quad (7)$$

2.2 逆QR分解框架

基于QR分解的原理, 存在酉矩阵 $\mathbf{Q}(n)$ 将 $\mathbf{\Lambda}(n) \cdot \mathbf{X}(n)$ 矩阵转化为分块矩阵, 对应的 $\mathbf{\Lambda}(n) \mathbf{d}(n)$ 改变为两个向量的组合

$$\mathbf{Q}(n) \mathbf{\Lambda}(n) \mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}(n) \mathbf{\Lambda}(n) \mathbf{d}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(n) \\ \mathbf{v}(n) \end{bmatrix} \quad (9)$$

于是可以将代价函数写为

$$J(n) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{z}(n) \\ \mathbf{v}(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}(n) \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(n) \right\|^2 + \|\hat{\mathbf{w}}(n)\|_1 \quad (10)$$

式中 $\mathbf{R}(n)$ 是一个 $M \times M$ 的上三角矩阵, 称为Cholesky因子; 并且0是一个 $(n-M) \times M$ 的零矩阵。 $\mathbf{z}(n)$ 为 $N \times 1$ 向量; 并且 $\mathbf{v}(n)$ 是一个 $(n-M) \times 1$ 向量。将上式采用矩阵乘法方式表达, 并在L1范数前加入能权衡稀疏性和估计误差的参数 γ

$$\begin{aligned}
J(n) &= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} z(n) - R(n)w(n) \\ v(n) \end{array} \right]^T \\
&\quad \times \left[\begin{array}{c} z(n) - R(n)w(n) \\ v(n) \end{array} \right] + \gamma \|w(n)\|_1 \\
&= 1/2 [z^T(n)z(n) - z^T(n)R(n)w(n) \\
&\quad - w^T(n)R^T(n)z(n) \\
&\quad + w^T(n)R^T(n)R(n)w(n) \\
&\quad + z^T(n)v(n)] + \gamma \|w(n)\|_1 \quad (11)
\end{aligned}$$

最小化这个正则化代价函数 $J(n)$ ，需求解 $J(n)$ 关于 $\hat{w}(n)$ 的梯度，并根据最小化条件使其等于零

$$\nabla J(n)|_{\hat{w}(n)} = 0 \quad (12)$$

L1范数项 $\|\hat{w}(n)\|_1$ 在任意一点 $\hat{w}(n) = 0$ 处都是不可微分的。所以引入次梯度的定义，给出了不可微可定凸函数情况下梯度的一种替代。近似的 $\|\hat{w}(n)\|_1$ 的次微分计算并带入上述等式关系

$$\nabla^S \|\hat{w}(n)\|_1 = \text{sgn}(\hat{w}(n)) \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\nabla J(n)|_{\hat{w}(n)} &= -\frac{1}{2R(n)^T z(n)} - \frac{1}{2R(n)^T z(n)} \\
&\quad + R(n)^T R(n)w(n) + \gamma \text{sgn}(w(n)) \\
&= 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

于是可得，使范数约束的成本函数最小化的最优滤波器系数

$$\hat{w}(n) = R^{-1}(n)z(n) - \gamma R^{-1}(n)R^{-T}(n)\text{sgn}(\hat{w}(n)) \quad (15)$$

L1-IQRD-RLS的 $\hat{w}(n)$ 递归化推导参考上述推导方式法，即存在一个 $(N+1) \times (N+1)$ 正交矩阵 $T(n)$

$$T(n) \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} R(n-1) \\ x^T(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(n) \\ 0^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$T(n) \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} z(n-1) \\ d(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(n) \\ \zeta(n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\zeta(n)$ 定义为右边向量中的最后一个分量。 $R^{-1}(n)z(n)$ 的递归化为

$$\begin{aligned}
R^{-1}(n)z(n) &= R^{-1}(n-1)z(n-1) + \frac{u(n)}{b(n)} \\
&\quad \cdot [d(n) - x^T(n)R^{-1}(n-1)z(n-1)] \quad (18)
\end{aligned}$$

其中定义了中间变量

$$a(n) = \frac{R^{-T}(n-1)x(n)}{\sqrt{\lambda}} \quad (19)$$

$$b^2(n) = 1 + a^T(n)a(n) \quad (20)$$

$$u(n) = \frac{R^{-1}(n-1)a(n)}{b(n)\sqrt{\lambda}} \quad (21)$$

由于式(15)对于 $n-1$ 同样成立，则有

$$\hat{w}(n-1) = R^{-1}(n-1)z(n-1) - \gamma R^{-1}(n-1) \cdot R^{-T}(n-1)\text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \quad (22)$$

根据此 $\hat{w}(n-1)$ 的形式，对于L1-IQRD-RLS的 $\hat{w}(n)$ ，可以构造其递归形式为

$$\begin{aligned}
\hat{w}(n) &= R^{-1}(n-1)z(n-1) - \gamma R^{-1}(n-1) \\
&\quad \cdot R^{-T}(n-1)\text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \\
&\quad + \gamma R^{-1}(n-1)R^{-T}(n-1)\text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \\
&\quad - \gamma R^{-1}(n)R^{-T}(n)\text{sgn}(\hat{w}(n)) + \frac{u(n)}{b(n)} \\
&\quad \cdot \left\{ d(n) - x^T(n) \begin{bmatrix} R^{-1}(n-1)z(n-1) \\ -\gamma R^{-1}(n-1) \\ R^{-T}(n-1) \\ \text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \\ +\gamma R^{-1}(n-1) \\ R^{-T}(n-1) \\ \text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \end{bmatrix} \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

其中

$$\hat{w}(n) = \hat{w}(n-1) + \Delta \hat{w}(n-1) \quad (24)$$

$\Delta \hat{w}(n-1)$ 是一个瞬时纠正步骤。为了得到 $\hat{w}(n)$ 的递归表达式，需确保右边只存在 $\hat{w}(n-1)$ 项的约束。可以假设权重值的符号函数值在单个时间步内不会发生显著变化，即 $\text{sgn}(\hat{w}(n)) = \text{sgn}(\hat{w}(n-1))$ 。

$$\begin{aligned}
\hat{w}(n) &= \hat{w}(n-1) + \frac{u(n)}{b(n)} [d(n) - x^T(n)\hat{w}(n-1)] \\
&\quad - \gamma \begin{bmatrix} R^{-1}(n)R^{-T}(n) - R^{-1}(n-1) \\ R^{-T}(n-1) + \frac{u(n)}{b(n)}x^T(n) \\ R^{-1}(n-1)R^{-T}(n-1) \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \quad (25)
\end{aligned}$$

通过矩阵求逆引理证明的 $R^{-1}(n)R^{-T}(n)$ 的递归表达式

$$\begin{aligned}
R^{-1}(n)R^{-T}(n) &+ u(n)u^T(n) \\
&= \frac{R^{-1}(n-1)R^{-T}(n-1)}{\lambda} \quad (26)
\end{aligned}$$

将式(26)、(21)、(19)带入式(25)，最终求解得到的 $\hat{w}(n)$ 的递归表达式如下

$$\begin{aligned}
\hat{w}(n) &= \hat{w}(n-1) + \frac{u(n)}{b(n)}e(n) - \gamma(1-\lambda) \\
&\quad \cdot R^{-1}(n)R^{-T}(n)\text{sgn}(\hat{w}(n-1)) \quad (27)
\end{aligned}$$

与L1-RLS算法相比，代价函数引入的稀疏参数 γ 相同，则在同样的条件下本文提出的算法和L1-RLS应该表现出相似的性能，但是本文提出的算法

理论上避免了误差积累, 具有更好的稳定性与更优的性能。由于L0范数是一个NP(Non-deterministic Polynomial)难题, 所以将通常使用的L0范数的近似函数

$$f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})) = \sum_{k=1}^M \left(1 - e^{-\tau|\mathbf{w}_k(\mathbf{n})|}\right) \quad (28)$$

并加入到RLS算法的代价函数, 引入权衡稀疏性和估计误差的参数 γ

$$J(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \epsilon(\mathbf{n}) + \gamma f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})) \quad (29)$$

同样利用次微分方法, 得到 f 函数的次梯度的第 k 项为

$$\{\nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}_k(\mathbf{n}))\} = \tau \text{sgn}(\hat{\mathbf{w}}_k(\mathbf{n})) e^{-\tau|\mathbf{w}_k(\mathbf{n})|} \quad (30)$$

进一步对指数项进行一阶泰勒展开降低计算复杂度

$$\begin{aligned} & \{\nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}_k(\mathbf{n}))\} \\ & \approx \begin{cases} \tau (\text{sgn}(\hat{\mathbf{w}}_k(\mathbf{n})) - \tau \mathbf{w}_k(\mathbf{n})), & |\hat{\mathbf{w}}_k(\mathbf{n})| \leq 1/\tau \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

同理于L1-IQRD-RLS的推导, 将(1.31)替换(1.15)其中的L1范数的次微分结果, 可以得到L0-IQRD-RLS算法的 $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})$ 的递归表达式如下

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}) = & \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}-1) + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{n})}{\mathbf{b}(\mathbf{n})} e(\mathbf{n}) - \gamma(1-\lambda) \\ & \cdot \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}-1)) \end{aligned} \quad (32)$$

所以, L1、L0范数等凸不可微正则化IQRD-RLS算法均可使用(1.32)所示的递归表达式, 并将这类算法统一称为Convex Regularized-inverse QR decomposition-RLS(CR-IQRD-RLS)算法。本文算法与IQRD-RLS算法相对比, 主要的区别在每一次迭代权系数更新额外增加了 $\gamma(1-\lambda) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}-1))$ 步骤, 如果此项先计算 $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n})$ 矩阵乘法, 那么整体复杂度会达到 $\mathcal{O}(N^3)$, 而根据矩阵乘法结合律, 改为计算两次矩阵和向量的乘法 $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) [\mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}-1))]$ 得到的结果和前者一样, 因此通过计算步骤的调整, 本文提到的CR-IQRD-RLS算法的计算复杂度和IQRD-RLS算法同样为 $\mathcal{O}(N^2)$ 。

2.3 稀疏参数动态优化

稀疏参数 γ 作为影响算法性能的关键超参数, γ 的选择机制存在显著敏感性: 过大会导致稀疏范数约束的算法性能大幅下降, 过小则算法的优化效果不太明显。因此对于各种不同情况寻找 γ 最优值的标定有重要意义。参考Eksioğlu等人提出的自动

估计最优稀疏参数 γ 方式, 并结合逆QR分解算法系数的递归更新步骤, 我们可以使本文的稀疏算法自动选择合理的正则化参数^[19]。首先, 根据CR-IQRD-RLS的代价函数(1.32)中引入的 $\gamma f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}))$ 利用了真实系统的一些先验知识, 我们假设这些先验信息是如下给出的真实的系统系数函数的常数上界约束

$$f(\mathbf{w}(\mathbf{n})) \leq \rho \quad (33)$$

使 γ 随着迭代改变记为 γ_n , 真实系统系数 $\mathbf{w}(\mathbf{n})$ 与本文算法估计的系数 $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})$ 的偏差为 $\hat{\epsilon}_n = \mathbf{w}(\mathbf{n}) - \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})$, 与IQRD-RLS算法的估计的系数偏差为 $\tilde{\epsilon}_n = \mathbf{w}(\mathbf{n}) - \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{n})$, 根据式(15)有

$$\hat{\epsilon}_n = \tilde{\epsilon}_n - \gamma_n \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})) \quad (34)$$

则每次迭代的瞬时平方差为

$$\begin{aligned} \hat{D}_n = & \hat{\epsilon}_n^T \hat{\epsilon}_n = \|\hat{\epsilon}_n\|_2^2 = \tilde{D}_n - 2\gamma_n \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n})) \mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \\ & \cdot \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) \tilde{\epsilon}_n + \gamma_n^2 \|\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \\ & \cdot \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{n}))\|_2^2 \end{aligned} \quad (35)$$

再根据定理: $\hat{D}_n \leq \tilde{D}_n$ if $\gamma_n \in [0, \max(\hat{\gamma}_n, 0)]$, 其中

算法1 算法伪代码

算法1 CR-IQRD-RLS

初始化: 阶数 M , 采样点数 N , 权系数 $\mathbf{w}(n)$, 输入信号 $x(n)$, 期望信号 $y(n)$,
分解因子矩阵 $\mathbf{R}^T(0) = \delta \mathbf{I}(\delta \geq 1)$, 遗忘因子 λ

- 1: 从 $n = 1$ 到 $n = N$:
- 2: $\mathbf{x}^T(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)]$
- 3: $e(n|n-1) = d(n) - \mathbf{w}^T(n-1)\mathbf{x}(n)$
- 4: $u_j^{(k)}(n) = 0, 1 \leq j \leq M, k < j$.
- 5: $b^{(0)}(n) = 1$
- 6: 从 $i = 1$ 到 $i = M$ 依次迭代
- 7: $a_i(n) = \lambda^{-1/2} \sum_{j=1}^i \mathbf{R}_{ij} j^{-T}(n-1)x(n-j+1)$
- 8: $b^i(n) = \sqrt{([b^{i-1}(n)]^2 + a_i^2(n))}$
- 9: $s_i(n) = a_i(n)/b^{(i)}(n)$
- 10: $c_i(n) = b^{(i-1)}(n)/b^{(i)}(n)$
- 11: 从 $j = 1$ 到 $j = i$ 依次迭代
- 12: $\mathbf{R}_{ij} j^{-T}(n) = \lambda^{-1/2} c_i(n) \mathbf{R}_{ij} j^{-T}(n-1) - s_i(n) u_j^{(i-1)}(n)$
- 13: $u_j^{(i)}(n) = c_i(n) u_j^{(i-1)}(n) + \lambda^{-1/2} s_i(n) \mathbf{R}_{ij} j^{-T}(n-1)$
- 14: 结束第 i 次循环
- 15: 结束第 i 次循环
- 16: $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) + e(n|n-1) \mathbf{u}(n)/b(n) - \gamma(1-\lambda) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{n}) [\mathbf{R}^{-T}(\mathbf{n}) \nabla^2 f(\mathbf{w}(n-1))]$
- 17: 结束第 n 次循环

$$\hat{\gamma}_n = 2 \frac{\nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(n))^T \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{R}^{-T}(n) \tilde{\epsilon}_n}{\|\mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{R}^{-T}(n) \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(n))\|_2^2} \quad (36)$$

及其近似计算结果为

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_n &\geq \gamma'_n \\ &= 2 \left\{ \frac{\text{tr}[\mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{R}^{-T}(n)] (f(\hat{\mathbf{w}}(n)) - \rho) / N}{+\nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(n))^T \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{R}^{-T}(n) \epsilon'_n} \right\} \\ &\quad / \|\mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{R}^{-T}(n) \nabla^S f(\hat{\mathbf{w}}(n))\|_2^2 \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $\epsilon'_n = \tilde{\mathbf{w}}(n) - \hat{\mathbf{w}}(n)$ ，在优化算法的每一次迭代中解算基础算法的 $\tilde{\mathbf{w}}(n)$ 不会增加计算复杂度，每次迭代中加入的正则参数自动选择 $\gamma_n \in [0, \max(\hat{\gamma}_n, 0)]$ 后算法的整体复杂度仍然为 $O(N^2)$ 与基础算法相同。

3 数值仿真试验

3.1 稀疏优化

为验证本文算法在稀疏系统中的性能，本节开展稀疏优化仿真试验。首先，构建一个待辨识的稀疏系统作为测试模型。在此基础上，对比分析以下算法的性能：无约束RLS算法、L1/L0范数约束的RLS算法，以及基于逆QR分解框架改进的L1/L0-IQRD-RLS算法。

仿真条件一：设置的待辨识的稀疏系统共有144阶，其中4个非零，记为稀疏性 $S=4$ 。非零标签权重的位置和幅值随机选择，每个幅值大小的选择服从均值为0标准差为1/S的高斯分布。假设输入 $x(n)$ 为均值为0标准差为5的高斯白噪声，并在在输出端加入观测噪声：均值为0标准差为0.2的高斯白噪声。为评估算法的跟踪速度、稳态误差性能，引入评价指标：系统脉冲响应估计值的归一化均方差(Normalized mean square deviation，文中简称为MSD)，定义为

$$\text{MSD} = \frac{\mathbb{E}\{\|\hat{\mathbf{w}}(n) - \mathbf{w}(n)\|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|\mathbf{w}(n)\|_2^2\}} \quad (38)$$

为了验证算法的跟踪能力，仿真在第800次迭代时将待辨识的稀疏系统系数的位置和幅值重新随机选择。遗忘因子 λ 的选择通常在(0.9,1)区间，值越低算法对新的数据跟踪能力越强，更能反应数据短期内的变化；值越高对以往数据的参考权重更大，更好反应数据整体变化。仿真将 λ 固定为0.99此时算法稳态误差和收敛速度较为均衡。经过多次测试，在当前稀疏性条件下，L1、L0范数约束算法 γ 分别取10、0.5时稳态误差最小，因此仿真将稀疏参数 γ 固定为最优值。

仿真所有的参数选择如下：RLS: $\lambda=0.99$ ；QIRD-RLS: $\lambda=0.99$ ；L1-RLS: $\lambda=0.99, \gamma=10$ ；L0-RLS: $\lambda=0.99, \gamma=0.5$ ；L1-IQRD-RLS: $\lambda=0.99, \gamma=10$ ；

L0-IQRD-RLS: $\lambda=0.99, \gamma=0.5$ ；共运行100次蒙特卡洛仿真，并绘制系统脉冲响应估计值的归一化均方差(MSD)随迭代次数的变化图。如图1所示：

如结果图1所示，各类范数约束RLS均方差曲线与其对应IQRD改进版本的均方差曲线基本重合。在稳态误差性能方面：L0范数约束的效果优于L1范数约束，无约束版本算法最差。各类算法均在500次迭代内接近收敛，系统突变以后也以基本相同的跌的次数接近收敛。仿真结果表明，引入逆QR分解依旧保持了各类范数约束优化后RLS算法稀疏优化性能，这证明了本文推导的逆QR分解架构稀疏正则化RLS算法的理论正确性。

3.2 数值稳定性分析

为验证逆QR分解优化后算法的数值稳定性，开展数值精度仿真试验。在特定位数的定点计算环境下，对以下算法进行了对比分析：无约束RLS算法、L1/L0范数约束RLS算法，以及对应的逆QR分解框架改进算法。

仿真条件二：降低待辨识的稀疏系统为10阶，4个非零标签权重的位置和幅值随机选择，其他参数选择与仿真条件一相同。考虑到各类递归算法在有限精度下的表现差距很大，多数算法在小数精度13位以下时开始出现不同的发散情况，因此选择小数位数设置为11位定点计算，舍入模式设为最近邻舍入，溢出处理采用饱和截断处理方式。为了证明算法长时间的稳定性，信号长度 n 设置为10 000。首先对RLS和IQRD-RLS算法进行了单次仿真，并设置了RLS在双精度浮点精度下的计算结果为对照。结果如图2。

可以看出RLS迭代了3 000次就出现了明显的发散现象，而IQRD-RLS却能在整个计算过程中保持稳定。鉴于单次仿真存在随机性导致发散时机与发散程度也具有随机性，本研究进一步实施100次蒙特卡洛仿真以验证算法鲁棒性，仿真结果如图3所示

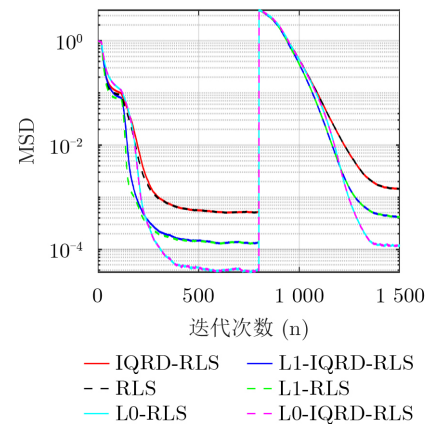


图 1 稀疏度4:144时不同算法性能

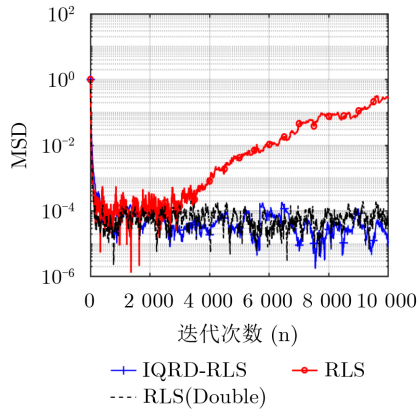


图2 单次11位定点仿真

根据蒙特卡洛仿真结果,无论是RLS算法还是范数约束RLS算法,采用逆QR分解优化求解过程后,均实现了11位小数定点计算环境下的长时间数值稳定性。而优化前的算法在此定点计算条件下,普遍呈现快速发散特性,平均结果也表现为短时间内发散。

3.3 稀疏参数动态优化分析

为评估算法在稀疏参数动态优化方面的性能,并验证系统不同稀疏度对算法性能的影响,本文设计并进行了以下两组仿真试验。

仿真条件三:验证算法稀疏参数动态优化性能。设置了100次蒙特卡洛仿真,将观测噪声改为均值为0标准差为0.1的高斯白噪声外,其他条件仿真条件与仿真条件一相同,并预先通过反复扫测仿真,在此条件下得到的最优正则参数 $\gamma = 5.7$,以最优正则参数L1-IQRD-RLS以及标准IQRD-RLS为参考,观察自动参数调整算法Auto-L1-IQRD-RLS的性能,从仿真结果如图4所示,可以看出自动参数选择算法的性能几乎逼近最优正则参数的算法,这表明可以通过这种自动估算正则化参数的方式,

避免稀疏优化算法应对未知系统反复的参数调优过程,保证稀疏约束的确能够起到性能优化的作用。

仿真条件四:验证系统不同稀疏度对算法性能的影响。将系统的稀疏度用参数 S 表示:待辨识的稀疏系统共有144阶,其中 $S(S=4, 9, 18, 36, 72, 144)$ 个非零, $S=144$ 时系统为完全非稀疏。非零标签权重的位置和幅值是随机选择,每个幅值大小的选择服从均值为0标准差为 $1/S$ 的高斯分布。假设输入 $x(n)$ 为均值为0标准差为1的高斯白噪声,观测噪声为均值为0标准差为0.01的高斯白噪声,设置了100次蒙特卡洛仿真。加入标准RLS性能为参考,当非零数目变化时,算法的性能变化如图5所示。当稀疏度存在,并且非零数目越少时,Auto L1-IQRD-RLS算法的性能越好;当稀疏度逐渐消失时,Auto L1-IQRD-RLS算法性能逐渐接近于标准RLS算法性能。仿真表明Auto L1-IQRD-RLS算法不需要根据仿真场景调整参数,具有优于标准RLS算法的性能,有效避免了复杂的稀疏参数 γ 的确定过程。

3.4 室内试验

为验证所提算法在实际应用场景中的性能,该部分设计了以系统辨识为框架、以交变电磁场耦合对消为具体测试场景的实验:构建线圈发射-磁通门接收系统,电磁感应线圈发射低频电磁信号,磁通门传感器作为接收端接收磁场信号,收发距设为1.5 m。由函数发生器产生单频信号激励线圈,并通过电流采集电阻采集线圈上的电流信号作为本文自适应滤波算法的参考输入信号 $S_2(n)$,磁通门传感器接收信号经过带通滤波的信号作为本文算法的期望信号 $d(n)$,其中包含 $S_2(n)$ 经过信道的结果 $S'_T(n)$ 和信道中存在的噪声 $N_1(n)$,通过算法对传输信道的识别,实现对发射端到接收端直达信号的预测,

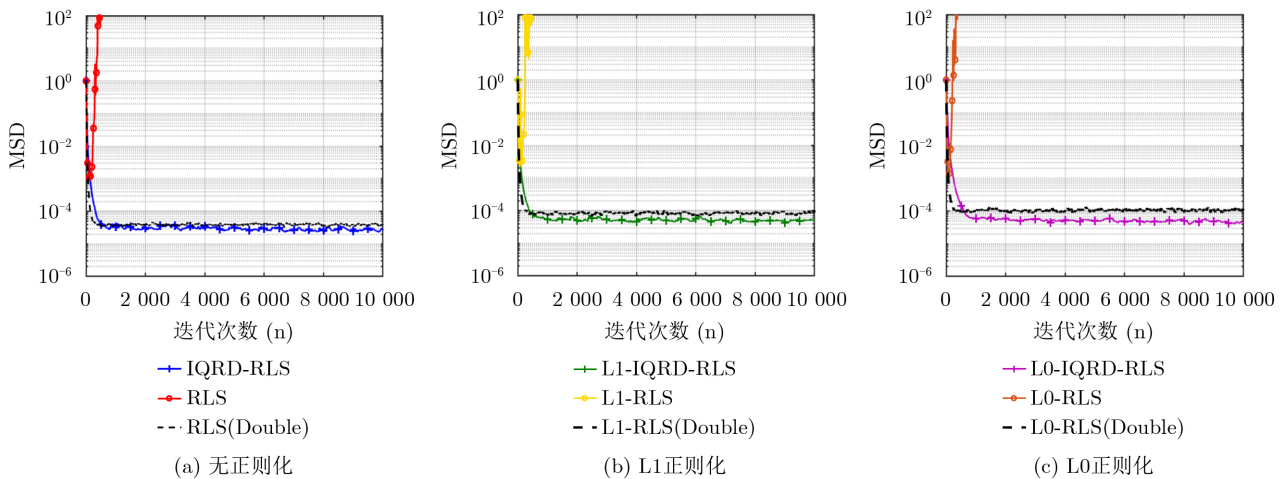


图3 一百次蒙特卡洛11位定点仿真

并于实际接收信号相减,实现收发隔离^[31]。信号采集通过采集卡完成并上传上位机,上位机部署算法实现对消步骤。分别使用本文算法和标准RLS计算信道识别结果 W_1-W_N ,整体实验条件如图6所示。由于算法在采样率较低、自适应滤波器阶数设置较高时,算法对电磁信号传输系统的识别结果在一段时间内保持一定的稀疏度,可以认为在此时间范围内系统稀疏。

当算法数值精度设为双精度,采样率设为5 000 Hz,设置自适应算法的阶数均为150,为单独比较自适应滤波算法性能,此处未作带通滤波等额外的步骤。在相同的参数设置条件下,RLS算法

和本文提到的L0-IQRD-RLS算法得到的传输系数对比如图7所示,可以看出,RLS得到的系数绝大多数逼近零但是非零,而L0-IQRD-RLS利用了系数固有的稀疏性将逼近零的系数快速归为零。当对消稳定后残留的信号是观测噪声,可以从图8信号对消的迭代过程可以看出优化后的算法收敛速度更快,在5 s内就达到稳定状态,而标准RLS算法的对消结果达到完全稳定用了30 s。因此本文算法相较基础算法实现了稀疏约束优化。因此,在双精

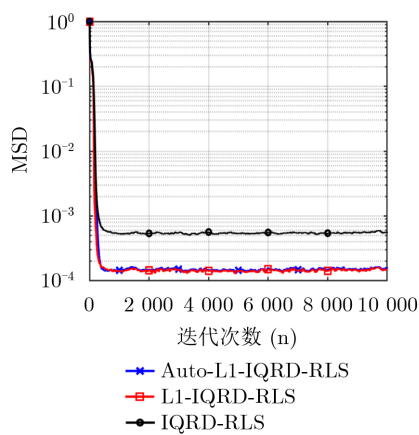


图4 正则参数自动选择效果

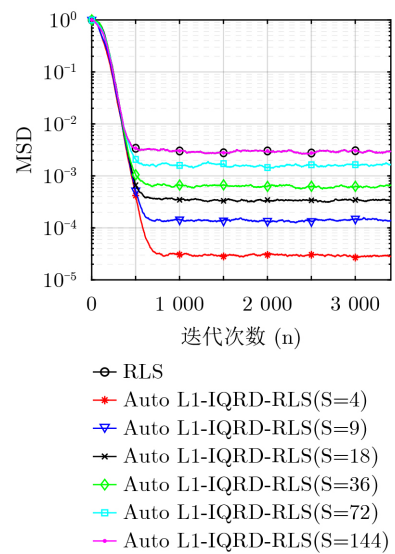


图5 算法性能随系统稀疏度变化

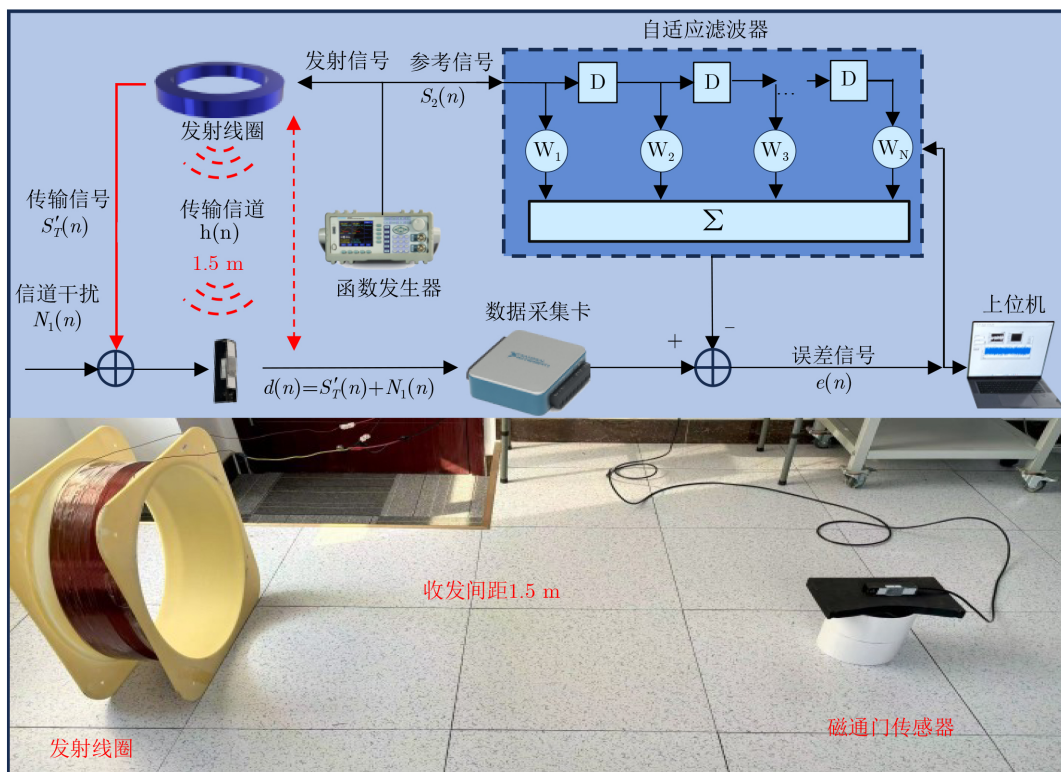


图6 实验场景图

度条件下,两种算法在长时间内都能保持数值稳定,而L0-IQRD-RLS算法表现出更优秀的收敛速度和稳态误差性能。

为进一步比较两者在有限计算资源下的表现,将计算精度限定为16位定点,保持其余条件不变进行对比。两种算法的迭代的过程如图9所示。L0-

IQRD-RLS算法的对消结果依旧表现为快速收敛,并且保持一直稳定,然而标准RLS算法在第24秒,即大概进行到120 000次迭代时快速发散。因此优化后的算法相较基础算法实现了数值稳定性的提升。本次实验一定程度上证明了本文算法的鲁棒性、稀疏约束性。

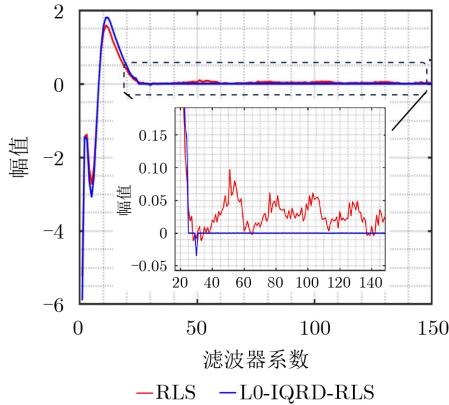


图7 滤波器系数识别结果对比

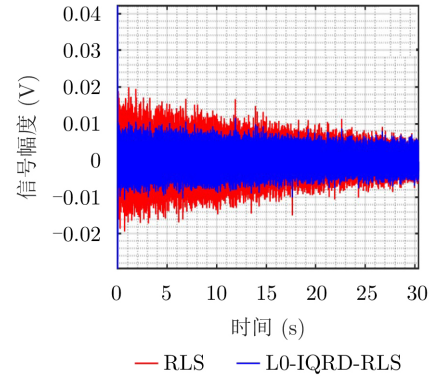


图8 对消结果对比

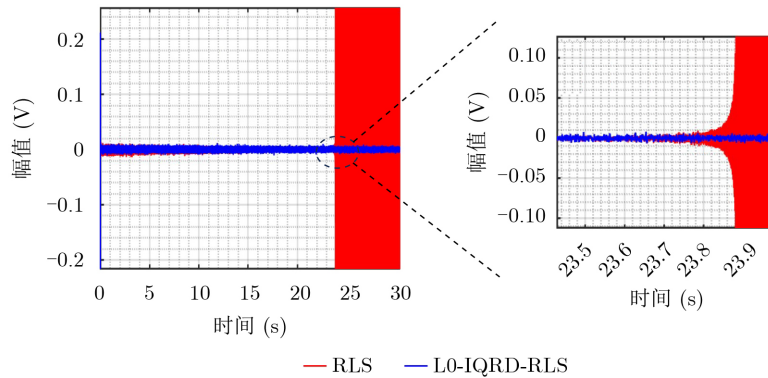


图9 小数16位定点运算结果

4 结论

面向传统稀疏正则化递归最小二乘算法数值稳定性差的缺陷,提出了一种基于逆QR分解的改进架构,可在有限计算精度下显著提升算法的鲁棒性。该方法具有关于稀疏正则化逆QR分解RLS算法的严谨理论推导与自适应权重更新公式,通过改变多个矩阵和向量相乘顺序,优化了算法的计算复杂度。蒙特卡洛数值仿真试验表明,在11位小数定点计算环境下经逆QR分解改进的算法能够保持长时间数值稳定性,相较于传统算法在鲁棒性方面表现出显著优势。实测数据应用效果表明经逆QR框架改进后的正则化RLS算法,在系统稀疏表征、参数估计以及数值稳定性等关键指标上均展现出显著优势,其迭代收敛成功率较传统方法得到显著提升。

参考文献

- [1] WIDROW B and STEARNS S D. Adaptive Signal Processing[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.
- [2] HAYKIN S. Adaptive Filter Theory[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc. , 1996.
- [3] PALEOLOGU C, BENESTY J, and CIOCHINA S. A robust variable forgetting factor recursive least-squares algorithm for system identification[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, 15: 597–600. doi: [10.1109/LSP.2008.2001559](https://doi.org/10.1109/LSP.2008.2001559).
- [4] CHOWDHURY N M M and ULLAH M A. An efficient channel equalization scheme with multi-layer of adaptation[C]. Proceedings of 2025 International Conference on Electrical, Computer and Communication Engineering (ECCE), Chittagong, Bangladesh, 2025: 1–6. doi: [10.1109/ECCE64574.2025.11013831](https://doi.org/10.1109/ECCE64574.2025.11013831).

- [5] LIU Di, BALDI S, LIU Quan, *et al.* A recursive least squares algorithm with ℓ_1 regularization for sparse representation[J]. *Science China Information Sciences*, 2023, 66(2): 129202. doi: [10.1007/s11432-022-3546-5](https://doi.org/10.1007/s11432-022-3546-5).
- [6] ALEXANDER S T and GHIMIKAR A L. A method for recursive least squares filtering based upon an inverse QR decomposition[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(1): 20. doi: [10.1109/TSP.1993.193124](https://doi.org/10.1109/TSP.1993.193124).
- [7] GHIRNIKAR A L, ALEXANDER S T, and PLEMMONS R J. A parallel implementation of the inverse QR adaptive filter[J]. *Computers & Electrical Engineering*, 1992, 18(3/4): 291–300. doi: [10.1016/0045-7906\(92\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0045-7906(92)90021-5).
- [8] QIN Zhen, TAO Jun, XIA Yili, *et al.* Proportionate RLS with l_1 norm regularization: Performance analysis and fast implementation[J]. *Digital Signal Processing*, 2022, 122: 103366. doi: [10.1016/j.dsp.2021.103366](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103366).
- [9] WANG Yu, QIN Zhen, TAO Jun, *et al.* Sparse adaptive channel estimation based on l0-PRLS algorithm for underwater acoustic communications[C]. Proceedings of OCEANS 2022-Chennai, Chennai, India, 2022: 1–5. doi: [10.1109/OCEANSChennai45887.2022.9775337](https://doi.org/10.1109/OCEANSChennai45887.2022.9775337).
- [10] LIU Haotian, MA Lu, WANG Zhaohui, *et al.* Channel prediction for underwater acoustic communication: A review and performance evaluation of algorithms[J]. *Remote Sensing*, 2024, 16(9): 1546. doi: [10.3390/rs16091546](https://doi.org/10.3390/rs16091546).
- [11] YIN Jingwei, ZHU Guangjun, HAN Xiao, *et al.* Temporal correlation and message-passing-based sparse Bayesian learning channel estimation for underwater acoustic communications[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2024, 49(2): 522–541. doi: [10.1109/JOE.2023.3330523](https://doi.org/10.1109/JOE.2023.3330523).
- [12] CHAVAN S D, KANASE D B, JADHAV S P, *et al.* Underwater wireless communication network by magnetic field using sparse sensing[C]. Proceedings of 2024 International Conference on Intelligent Systems and Advanced Applications (ICISAA), Pune, India, 2024: 1–5. doi: [10.1109/ICISAA62385.2024.10829175](https://doi.org/10.1109/ICISAA62385.2024.10829175).
- [13] THADIKAMALLA N R and AMARA P R. Synthesis of elliptical cylindrical antenna array using craziness particle swarm optimization for suppressing sidelobe level[J]. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2024, 38(14): 1592–1604. doi: [10.1080/09205071.2024.2385502](https://doi.org/10.1080/09205071.2024.2385502).
- [14] ZORKUN A E, SALAS-NATERA M A, and RODRÍGUEZ-OSORIO R M. An improved hybrid beamforming algorithm for fast target tracking in satellite and V2X communication[J]. *Remote Sensing*, 2024, 16(1): 13. doi: [10.3390/rs16010013](https://doi.org/10.3390/rs16010013).
- [15] HONG Jingxi, CHU Yijing, CHAN S C, *et al.* A robust RLS-based generalized sidelobe canceller using spatial regularization[J]. *Digital Signal Processing*, 2025, 164: 105273. doi: [10.1016/j.dsp.2025.105273](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2025.105273).
- [16] 曲庆, 金坚, 谷源涛. 用于稀疏系统辨识的改进l0-LMS算法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(3): 604–609. doi: [10.3724/SP.J.1146.2010.00417](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2010.00417).
- QU Qing, JIN Jian, and GU Yuantao. An improved l0-LMS algorithm for sparse system identification[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(3): 604–609. doi: [10.3724/SP.J.1146.2010.00417](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2010.00417).
- [17] SALMAN M, YOUSSEF A A F, ELSAYED F, *et al.* A sparse variable step-size least-mean-square algorithm for impulsive noise in a code-division multiple access system[J]. *IEEE Access*, 2025, 13: 86026–86031. doi: [10.1109/ACCESS.2025.3570122](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3570122).
- [18] EKŞIOĞLU E M. RLS adaptive filtering with sparsity regularization[C]. Proceedings of the 10th International Conference on Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA 2010), Kuala Lumpur, Malaysia, 2010: 550–553. doi: [10.1109/ISSPA.2010.5605592](https://doi.org/10.1109/ISSPA.2010.5605592).
- [19] EKSIOGLU E M and TANC A K. RLS algorithm with convex regularization[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(8): 470–473. doi: [10.1109/LSP.2011.2159373](https://doi.org/10.1109/LSP.2011.2159373).
- [20] GILL P E, GOLUB G H, MURRAY W, *et al.* Methods for modifying matrix factorizations[J]. *Mathematics of Computation*, 1974, 28(126): 505–535. doi: [10.1090/S0025-5718-1974-0343558-6](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1974-0343558-6).
- [21] CHU Y J and MAK C M. A new QR decomposition-based RLS algorithm using the split Bregman method for L1-regularized problems[J]. *Signal Processing*, 2016, 128: 303–308. doi: [10.1016/j.sigpro.2016.04.013](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.04.013).
- [22] CHEN Badong, ZHENG Nanning, and PRINCIPE J C. Sparse kernel recursive least squares using L1 regularization and a fixed-point sub-iteration[C]. Proceedings of 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Florence, Italy, 2014: 5257–5261. doi: [10.1109/ICASSP.2014.6854606](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2014.6854606).
- [23] STANCIU C L, ANGHEL C, and ELISEI-ILIESCU C. Regularized RLS adaptive algorithm with conjugate gradient method[C]. Proceedings of 2023 International Conference on Speech Technology and Human-Computer Dialogue (SpeD), Bucharest, Romania, 2023: 18–23. doi: [10.1109/SpeD59241.2023.10314893](https://doi.org/10.1109/SpeD59241.2023.10314893).
- [24] HUANG Yanjie, WANG Weijiang, XUE Chengbo, *et al.* Scalable hardware architecture for high-throughput implementation of ESPRIT algorithm[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2025, 25(13): 24812–24828. doi: [10.1109/JSEN.2025.3568483](https://doi.org/10.1109/JSEN.2025.3568483).
- [25] LIU Quan, LIU Di, and BALDI S. A new recursive approach to sparse representation[C]. Proceedings of 2023 IEEE International Conference on Development and

- Learning (ICDL), Macau, China, 2023: 461–466. doi: [10.1109/ICDL55364.2023.10364401](https://doi.org/10.1109/ICDL55364.2023.10364401).
- [26] XING Jinling, GE Songhu, HE Fangmin, *et al.* RF cancellation system based on inverse QRD_RLS weight extraction[C]. Proceedings of 2023 IEEE 6th International Conference on Electronic Information and Communication Technology (ICEICT), Qingdao, China, 2023: 154–158. doi: [10.1109/ICEICT57916.2023.10245523](https://doi.org/10.1109/ICEICT57916.2023.10245523).
- [27] DJIGAN V and KURGANOV V. Antenna arrays calibration using recursive least squares adaptive filtering algorithms based on inverse QR decomposition[C]. Proceedings of 2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Varna, Bulgaria, 2020: 1–5. doi: [10.1109/EWDTS50664.2020.9224860](https://doi.org/10.1109/EWDTS50664.2020.9224860).
- [28] NEOH H S, DUHAMEL P, and PYE W. MVDR adaptive beamforming using oneAPI SYCL HLS targeting direct RF FPGA[C]. Proceedings of 2024 IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology (ARRAY), Boston, USA, 2024: 1–5. doi: [10.1109/ARRAY58370.2024.10880432](https://doi.org/10.1109/ARRAY58370.2024.10880432).
- [29] DJIGAN V. Adaptive arrays based on real-valued arithmetic linearly-constrained IQRD RLS adaptive filtering algorithms[C]. Proceedings of 2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), Lviv, Ukraine, 2021: 196–201. doi: [10.1109/UKRCON53503.2021.9575646](https://doi.org/10.1109/UKRCON53503.2021.9575646).
- [30] 刘金荣, 冷相文, 姬庆, 等. 水声通信信道估计技术的研究进展[J]. 电讯技术, 2024, 64(12): 2081–2090. doi: [10.20079/j.issn.1001-893x.240823003](https://doi.org/10.20079/j.issn.1001-893x.240823003).
- LIU Jinrong, LENG Xiangwen, JI Qing, *et al.* Advances in channel estimation for underwater acoustic communications[J]. *Telecommunication Engineering*, 2024, 64(12): 2081–2090. doi: [10.20079/j.issn.1001-893x.240823003](https://doi.org/10.20079/j.issn.1001-893x.240823003).
- [31] 谭思炜, 赵军, 张萌, 等. 一种宽带电磁引信直接耦合干扰的快速补偿方法[J]. 水下无人系统学报, 2019, 27(4): 420–427. doi: [10.11993/j.issn.2096-3920.2019.04.009](https://doi.org/10.11993/j.issn.2096-3920.2019.04.009).
- TAN Siwei, ZHAO Jun, ZHANG Meng, *et al.* A method for fast compensating direct coupling interference of wideband electromagnetic fuze[J]. *Journal of Unmanned Undersea Systems*, 2019, 27(4): 420–427. doi: [10.11993/j.issn.2096-3920.2019.04.009](https://doi.org/10.11993/j.issn.2096-3920.2019.04.009).
- [32] 鲁伟俊, 李斌. 主动磁探测叠加信号的自适应对消技术研究[J]. 中国仪器仪表, 2019(6): 55–59. doi: [10.3969/j.issn.1005-2852.2019.06.018](https://doi.org/10.3969/j.issn.1005-2852.2019.06.018).
- LU Weijun and LI Bin. Study of the active magnetic detection based on adaptive cancellation for superposed signal[J]. *China Instrumentation*, 2019(6): 55–59. doi: [10.3969/j.issn.1005-2852.2019.06.018](https://doi.org/10.3969/j.issn.1005-2852.2019.06.018).
- 彭 弋: 男, 硕士生, 研究领域为自适应滤波技术、电磁探测、电磁对抗等。
- 张鹏飞: 男, 博士, 讲师, 研究领域为电磁探测、电磁探测数值模拟、机器学习及深度学习的工程应用等。
- 高俊奇: 男, 博士, 教授, 研究领域为高灵敏磁电复合型(ME)磁传感器, 隧道磁电阻(TMR)磁传感器, 能量收集器, 弱磁目标探测等。
- 李长隆: 男, 硕士生, 研究领域为磁异常信号检测、深度学习等。
- 张志远: 男, 硕士生, 研究领域为天线设计、电路设计等。

责任编辑: 马秀强

Research on Inverse QR Decomposition Optimization for Sparse Adaptive System Identification Algorithms

PENG Yi^{①②③} ZHANG Pengfei^{①②③} WANG Xiaoyong^④ GAO Junqi^{①②③}
LI Changlong^{①②③} ZHANG Zhiyuan^{①②③} SUN Tianxiang^{①②③}

^①(Harbin Engineering University, National Key Laboratory of Underwater Acoustic Technology, Harbin 150001, Heilongjiang, China)

^②(Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security, Ministry of Industry and Information Technology, Harbin Engineering University, Ministry of Industry and Information Technology, Harbin 150001, Heilongjiang, China)

^③(Harbin Engineering University, School of Underwater Acoustic Engineering, Harbin 150001, Heilongjiang, China)

^④(Huangdao District Political Consultative Conference Service Guarantee Center, Qingdao 266555, Shandong, China)

Abstract:

Objective The traditional sparse regularization recursive least squares algorithm, L1/L0 Norm Recursive Least Squares (L1/L0-RLS), demonstrates theoretical superiority in sparse parameter space estimation and has become a significant method in system identification and channel equalization. However, under limited numerical precision conditions, its covariance matrix iterative computation process can lead to successive accumulation of rounding errors, inducing divergence and instability in the least squares solution.

Methods To address this issue, this paper proposes an improved algorithm based on the Inverse QR Decomposition (IQRD) framework. This framework not only effectively suppresses the accumulation of rounding errors in traditional regularized RLS algorithms, but also eliminates the calculation step of weight coefficient replacement in traditional QR decomposition, thereby significantly improving the numerical robustness and system identification efficiency of the algorithm in finite precision environments. Specifically, this article first systematically constructs the L1-IQRD-RLS and L0-IQRD-RLS algorithms under the L1/L0 constrained inverse QR decomposition architecture. Through theoretical derivation, a universal recursive expression for weight coefficients is obtained, and an innovative automatic parameter selection mechanism is introduced into the algorithm framework to solve the dynamic optimization problem of sparse regularization parameters.

Results and Discussions To verify the effectiveness of the proposed algorithm in sparse constraints and robustness, Monte Carlo simulation experiments were used to quantitatively evaluate the algorithm performance. The results showed that L1-IQRD-RLS and L0-IQRD-RLS can maintain long-term numerical stability in an 11 decimal fixed-point computing environment. Compared with traditional algorithms, they exhibit significant performance advantages in key indicators such as system sparse representation, parameter estimation variance, and covariance matrix condition number. Further verification of actual test data confirms that the improved algorithm can maintain numerical stability even in environments with limited accuracy, significantly improving its robustness compared to traditional methods. The application effect of measured data shows that the regularized RLS algorithm improved by the inverse QR framework exhibits significant advantages in key indicators such as system sparsity representation, parameter estimation, and numerical stability. Its iterative convergence success rate is significantly improved compared to traditional methods.

Conclusions This paper focuses on the issue of sparse system identification in the field of adaptive filtering. Currently, traditional sparse-regularized recursive least squares (RLS) algorithms still face challenges in numerical stability under limited numerical precision. To address this problem, this study proposes constructing an inverse QR decomposition framework to overcome the numerical ill-conditioning caused by successive rounding errors in sparse-regularized RLS algorithms. This approach significantly enhances the algorithm's numerical robustness in low-precision environments. Additionally, it innovatively introduces an automatic parameter selection mechanism into the algorithm framework, effectively eliminating the need for repeated parameter tuning and ensuring stable performance optimization through sparse constraints. In practical electromagnetic signal processing, tasks such as system identification and beamforming are constrained by the finite precision of hardware implementation and often face the inherent sparsity characteristics of the system itself. This paper's algorithm provides targeted solutions: its enhanced finite word-length robustness effectively suppresses numerical divergence in adaptive weight updates, ensuring stable implementation on fixed-point processors; meanwhile, the introduced sparse constraints naturally align with the physical structure of sparse arrays, improving the accuracy of algorithm estimation results. This research offers a practical algorithmic approach for achieving high-performance, high-stability sparse-constrained systems on precision-limited hardware platforms.

Key words: Recursive least squares; Sparse optimization; Inverse QR decomposition; System identification